

106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$.

- On commencera par étudier $SL(E)$, déjà pour lui-même, mais aussi parce qu'il nous donnera des infos importantes sur $GL(E)$.
- Ensuite on étudiera le groupe orthogonal, après avoir muni E d'une structure euclidienne.
- Puis l'étude topologique, après avoir muni E d'une structure topologique ; on verra les décompositions...

E un K -ev de dimension n

Notations : $GL(E)$ automorphismes de E . $GL(K^n)$: automorphismes de K^n . $GL_n(K)$: matrices inversibles de taille n .

Déf : $GL(E)$ [Szp 294]

Rq : si on fixe une base de E , E est isomorphe à K^n , et donc $GL(E)$ est isomorphe à $GL(K^n)$, lui-même isomorphe à $GL_n(K)$.

A partir de maintenant, on fixe une base de E .

I) Etude du groupe spécial linéaire [Per] + [Szp]

1) Groupe spécial linéaire et dévissage

Déf : $SL(E)$ (définition valable car le déterminant dépend pas de la base fixée) ; $SL_n(K)$.

Prop : $GL_n(K)$ est psd de $SL_n(K)$ par K^* (les deux sg à considérer sont $SL_n(K)$ et les matrices du type $\text{diag}(a, 1, \dots, 1)$ où $a \in K^*$)

2) Générateurs

Déf : transvection, dilatation (transvection=élément fixant un hyperplan [Szp 298])

Prop : les transvections sont conjuguées si $n \geq 3$

Th : Les transvections engendrent $SL(E)$ [Szp] (on commence par montrer un lemme qui dit que si on a x, y dans E , alors y est l'image de x par une transvection ou un produit de 2 transvections. On a aussi besoin du lemme qui dit que si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts et que si on prend x qui est pas dans leur intersection, alors il y a une transvection qui envoie x sur x et H_1 sur H_2 (on se sert du lemme précédent). Pour le th faut alors une récurrence sur n . On fixe u dans $SL(E)$ et x . On prend H un hyperplan contenant pas x . Par les lemmes, on peut supposer $u(H)=H$ et $u(x)=x$, quitte à remplacer u par $u \circ \text{transvections}$. On écrit la matrice de u dans une base adaptée. On applique l'hypothèse de récurrence à u restreint à H et c'est bon)

Rq : tout élément de $SL_n(K)$ est engendré par au plus n transvections ($n+1$ si c'est une homothétie). Démo difficile

Th : $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations (u dans $GL(E)$, v une dilatation de rapport $1/\det(u)$, vu est dans $SL(E)$ bref c'est ok)

3) Application : centre et groupe dérivé

Appl : le centre de $GL_n(K)$ est l'ensemble des homothéties, celui de $SL_n(K)$ est l'ensemble des homothéties de déterminant 1 (on montre que $utu^{-1}=t$ pour toute transvection, donc u fixe toutes les droites donc c'est bon. Pareil pour $SL_n(K)$)

Csq : on peut définir $PGL_n(K)$, qui est un groupe (le groupe projectif linéaire), et $PSL_n(K)$ (groupe projectif spécial).

Th : $D(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$, $D(\mathrm{SL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$ (sauf pour $(2, \mathbb{F}_2), (3, \mathbb{F}_3)$). Un sens simple. Pour l'autre, il faut mq une transvection est un commutateur, car alors ce sera le cas de toutes les transvections

Th : $\mathrm{PSL}_n(K)$ est simple si $n \geq 3$ (on regarde un sg normal non trivial de $\mathrm{PSL}_n(K)$, son image réciproque par la proj canonique, qui doit être un sg distingué de $\mathrm{SL}_n(K)$). On mq qu'il contient une transvection, et comme elles sont toutes conjuguées pour $n \geq 3$, il les contient toutes, donc c'est $\mathrm{SL}_n(K)$ entier

Rq : on a une infinité de groupes simples ! (bon y'a les A_n aussi)

4) Cas particuliers [Perr] + [Szp]

a) $n=2$, K différent de \mathbb{F}_2 ou \mathbb{F}_3

$\mathrm{PSL}_2(K)$ est simple sauf pour $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ (pénible)

b) $n=2$, $K = \mathbb{F}_2$ ou \mathbb{F}_3

Cardinaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$

Isomorphismes exceptionnels

II) Etude du groupe orthogonal [Szp]

On munit E d'un produit scalaire (on pourrait le munir d'une fq qcq mais faut bien faire des choix).

Prop : On est psd de SO_n avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le produit est direct quand n est impair.

...Recopier le Szpirglas...

III) Etude topologique [MT] + [Ale] + [DSerr]

Ici, $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et on munit $\mathrm{GL}_n(K)$ de la topologie usuelle.

1) Densité

$\mathrm{GL}_n(K)$ est un ouvert dense de $M_n(K)$

$D_n(\mathbb{C})$ dense dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

2) Compacité

Les groupes $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ sont compacts

Sous groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ [Ale]

3) Connexité

Prop : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs [MT 17] *C'est plus compliqué pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Appl : l'ensemble des matrices complexes de rang r est connexe [MT]

Prop : H connexe et G/H connexe $\Rightarrow G$ connexe [MT 31]

Appl : $SO(n, \mathbb{R})$ est connexe [MT 34] (action sur sphère de \mathbb{R}^n , utilise $O(n)$ compact + th homéo version simple + connexité sphère. Attention, la démo ne marche pas pour $SO(n, \mathbb{C})$ n'est pas compact !) (la sphère est connexe car image de l'appl $x/N(x)$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

Appl : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple (savoir que $PSO_n(\mathbb{R})$ est simple pour $n \geq 5$ [Szp 327]. $SO(4)$ n'est pas simple car contient le sg distingué $\{Id, -Id\}$ (pareil pour tout n pair). Reste les cas $PSO(2)$ et $PSO(4)$. $PSO(4)$ est isomorphe à $SO(3) \times SO(3)$ (quaternions) donc non simple [Per 166] $SO(2)$ est commutatif donc sûrement pas simple...)

Csq : $O(n, \mathbb{R})$ a deux CC [MT 34]

Rq : en fait, $SO(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs [MT 35] ($SO(n, \mathbb{C})$ est connexe mais c'est tendu. On déduit de la décomp polaire complexe un homéo entre $O(n, \mathbb{C})$ et $An(\mathbb{R}) \times O(n, \mathbb{R})$, ce qui donne 2 CC pour $O_n(\mathbb{C})$)

Th : $U(n, \mathbb{C})$ et $SU(n, \mathbb{C})$ sont connexes [MT 37] (action sur sphère de \mathbb{C}^n)

4) Décomposition polaire

Th : decomp polaire. $GL_n(\mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) * S$; $GL_n(\mathbb{C}) = O(n, \mathbb{C}) * H_n$ [MT 20]

Csq : $GL_n(\mathbb{R})$ a deux CC [MT 35] (il faut mq $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe. Pour ça, $GL_n^+(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on calcule le stab, on utilise le gros th d'homéo, on finit par récurrence. Ou alors on le déduit de la decomp polaire)

Th : $O(p, q) = O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ (se sert de la décomp polaire)

Th : $O(p, q)$ a 4 composantes connexes ; les détailler [MT 107] + [DSerr 85]

Développements :

1 - Sous groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ [Aless 141] (***)

2 - Décomposition polaire [MT 18] + [FGN Alg3 177] (**)

3 - Isomorphismes exceptionnels [Perr 105] (**)

$SO_3(\mathbb{C})$ isomorphe à $PSL_2(\mathbb{C})$ [???] (*)

Bibliographie :

[Szp]

[Per]

[Ale] Thèmes de géométrie

[MT]

[DSerr]

Pas mis :

- G est un sg fini de $GL(K)$ ssi il est d'exposant fini.

Rapport du jury : il faut savoir réaliser S_n dans $GL(n, \mathbb{R})$ et faire le lien entre signature et déterminant. Les applications topologiques sont acceptables dans la leçon d'algèbre. Cette leçon peut être traitée, ou comprise de plusieurs façons. En général on attend que le candidat précise à chaque instant quelle structure il considère sur l'espace vectoriel E ; au départ E n'a pas de structure et on peut parler de $SL(E)$, k_Id , des sous-groupes finis, du groupe dérivé en fonction du corps. Quand le corps est \mathbb{R} on peut interpréter $SL(E)$ comme transformation conservant le volume et l'orientation. On peut ensuite considérer ce qui se passe si on choisit une base, un drapeau, une structure euclidienne, un produit hermitien. On peut traiter aussi le cas des sous-groupes finis de $SO(3)$.